Espacios compactos

Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Un **recubrimiento** de X es una familia $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ tal que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Un **recubrimiento abierto** de X es un recubrimiento de X formado por conjuntos abiertos.
Dado un recubrimiento $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in J\}$ de X, un **subrecubrimiento** de $\mathcal{A}$ es una subfamilia $\mathcal{A}' = \{A_i \mid i \in J\}$ $(J \subset I)$ que sigue siendo recubrimiento de X.
Un espacio topológico X es **compacto** si todo recubrimiento abierto $\mathcal{A}$ de X tiene un subrecubrimiento finito. (es decir, si para cualquier recubrimiento abierto $\mathcal{A} = \{U_i \mid i \in I\}$ de X existen $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$ tal que $X = U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_k}$).
Por tanto, X es **no compacto** si existe un recubrimiento abierto infinito $\mathcal{A} = \{U_i \mid i \in I\}$ de X tal que ninguna subfamilia finita suya recubre X.

Ejemplos. a) Todo conjunto es compacto con la topología trivial (inmediato).
b) Todo conjunto finito es compacto con cualquier topología (inmediato).
c) Todo conjunto infinito con la topología discreta no es compacto (inmediato).
d) La recta real $\mathbb{R}$ no es compacta ($\mathcal{A} = \{(-n, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento de $\mathbb{R}$ sin subrecurimiento finito).
e) La recta digital no es compacta ($\mathcal{A} = \{\{-2n-1, -2n, \ldots, 2n, 2n+1\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un recubrimiento de $\mathbb{R}$ sin subrecurimiento finito).

Compacidad de los intervalos

a) $[0,1]$ es compacto.
Sea $\mathcal{A} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recubrimiento abierto de $[0,1]$. Sea $C = \{x \in [0,1] \mid [a,x]$ recubierto por cantidad finita de abiertos de $\mathcal{A}\}$. Entonces $C \neq \emptyset$, pues $a \in C$, y está acotado superiormente. Por tanto, existe $c = \sup C$.
Supongamos que $c < 1$. Existe $i_0 \in I$ tal que $c \in U_{i_0}$. Sea $d \in U_{i_0}$ tal que $d > c$. Entonces $d \in C$ (contradicción con $c = \sup C$). Por tanto $c = 1$.
Esto implica que $[0,1]$ puede ser recubierto por una cantidad finita de abiertos de $\mathcal{A}$.

b) $[0,1)$ no es compacto.
Sea $\mathcal{A} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con $U_n = [0, 1 - \frac{1}{n+1})$. Entonces $\mathcal{A}$ es un recubrimiento abierto de $[0,1)$ que no tiene ningún subrecubrimiento finito.

c) $(0,1)$ no es compacto.
Sea $\mathcal{A} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ con $U_n = (\frac{1}{n+2}, 1 - \frac{1}{n+2})$. Entonces $\mathcal{A}$ es un recubrimiento abierto de $(0,1)$ que no tiene ningún subrecubrimiento finito.

d) $[0,\infty)$ no es compacto.

e) $(0,\infty)$ no es compacto.

Compacidad con la topología de subespacio

Proposición. Sea $(X, \mathcal{T})$ espacio topológico y sea $A \subset X$. Entonces A es compacto con la topología de subespacio si y solo si todo recubrimiento de A por abiertos de X contiene un subrecubrimiento finito.

Demostración. **$\Rightarrow$)** Supongamos que A compacto y sea $\mathcal{A} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recubrimiento de A por abiertos de X. Entonces $\mathcal{A}' = \{(U_i \cap A) \mid i \in I\}$ es un recubrimiento de A por abiertos de A. Como A es compacto, existen $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$ tal que $A = (U_{i_1} \cap A) \cup (U_{i_2} \cap A) \cup \cdots \cup (U_{i_k} \cap A)$. Luego $A \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_k}$.
$\Leftarrow$) Recíprocamente, si $\mathcal{A} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recubrimiento de A por abiertos de A, para todo $i \in I$ existe U'_i abierto en X tal que $U_i = U'_i \cap A$. Entonces $\mathcal{A}' = \{U'_i \mid i \in I\}$ un recubrimiento de A por abiertos de X y por tanto existen $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$ tal que $A \subset U'_{i_1} \cup U'_{i_2} \cup \cdots \cup U'_{i_k}$. Luego $A = (U'_{i_1} \cap A) \cup (U'_{i_2} \cap A) \cup \cdots \cup (U'_{i_k} \cap A)$. Por tanto A es compacto en X.

Ejemplos. **a)** $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ es compacto. Sea $\mathcal{A} = \{U_i \mid i \in I\}$ es un recubrimiento de A por abiertos de $\mathbb{R}$. Entonces existe U_{i_0} tal que $0 \in U_{i_0}$ y existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \in U_{i_0}$ para todo $n \geq n_0$. Sean $i_1, i_2, \ldots i_{n_0 - 1}$ tales que $\frac{1}{k} \in U_{i_k}$. Entonces $\mathcal{A}' = \{U_{i_0}, U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots U_{i_{n_0-1}}\}$ es un subrecubrimiento finito de $\mathcal{A}$.
b) Sin embargo, $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es compacto pues su topología es la discreta.

Ejercicios

Ejercicio 1. Estudiar si $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ y $B = \mathbb{Q}$ son compactos con la topología usual.

Solución:

Ejercicio 2. Probar que $[0, 1]$ no es compacto con la topología de subespacio de $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{[,)})$.

Solución:

Ejercicios

Ejercicio 3. Sea $\mathcal{T}$ la topología en $\mathbb{R}$ con base $\mathcal{B} = \{(a,b) \mid a < b\} \cup \{(a,b) \cap \mathbb{Q} \mid a < b\}$. Probar que $[0,1]$ no es compacto en $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$.

Solución:

Ejercicio 4. ¿Cuáles son los subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos? ¿Y con la de los complementos numerables?

Solución:

Ejercicios

Ejercicio 5. Si un espacio es compacto con cierta topología, ¿lo es necesariamente con una menos fina? ¿y con una más fina?

Solución:

Ejercicio 6. Probar las siguientes afirmaciones o bien dar un contraejemplo.

a) La unión finita de compactos es compacta.

b) La unión de una familia cualquiera de compactos es compacta.

c) La intersección de una familia cualquiera de compactos es compacta.

Solución:

Conjuntos compactos vs conjuntos cerrados

Teorema. Sea X un espacio topológico compacto y sea $A \subset X$, A cerrado en X. Entonces A es compacto con la topología de subespacio.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in J\}$ un recubrimiento de A por abiertos de X.
Entonces $\mathcal{A}' = \{A_i \mid i \in J\} \cup \{X \setminus A\}$ es un recubrimiento abierto de X.
Por X compacto, existe $i_1, i_2, \ldots, i_k \in J$ tal que $X = A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k} \cup (X \setminus A)$.
Entonces $A \subset A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}$.

Teorema. Sea X un espacio topológico T_2 y sea $A \subset X$, A compacto. Entonces A es cerrado.

Demostración. Vamos a probar que $\bar{A} = A$.
Sea $x_0 \notin A$. Como X es T_2, para cada punto $y \in A$, existen U_y y V_y entornos disjuntos de x_0 e y, respectivamente.
La familia $\{V_y \mid y \in A\}$ es un recubrimiento de A por abiertos de X. Por tanto, existen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tales que $A \subset V_{y_1} \cup V_{y_2} \cup \cdots \cup V_{y_n}$.
Sea $U = U_{y_1} \cap U_{y_2} \cap \cdots \cap U_{y_n}$. Entonces U es un entorno de x_0 que no interseca a A.

Ejemplo. En $\mathbb{R}$ con la topología de los complementos finitos, que no es T_2, todos los conjuntos son compactos pero solo los conjuntos finitos son cerrados.

Compacidad y funciones continuas

Teorema. Sean X, Y espacios topológicos, X compacto, y sea $f : X \longrightarrow Y$ continua. Entonces $f(X)$ es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in J\}$ un recubrimiento abierto de $f(X)$ por abiertos de Y. Entonces $\{f^{-1}(A_i) \mid i \in J\}$ es un recubrimiento abierto de X (por f continua).
Por tanto existen $i_1, i_2, \ldots, i_k \in J$ tales que $X = f^{-1}(A_{i_1}) \cup f^{-1}(A_{i_2}) \cup \cdots \cup f^{-1}(A_{i_k})$.
Así, $f(X) = f(f^{-1}(A_{i_1})) \cup f(f^{-1}(A_{i_2})) \cup \cdots \cup f(f^{-1}(A_{i_k})) \subset A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \cdots \cup A_{i_k}$.

Corolario. La compacidad es una propiedad topológica.

Ejemplo. a) $[a, b]$ es compacto pero $[a, b)$ y (a, b) no son compactos.
b) S^1 es compacto.

Teorema. Sean X, Y espacios topológicos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y biyectiva. Si X es compacto e Y es T_2, entonces f es un homeomorfismo.

Demostración. Vamos a ver que f manda conjuntos cerrados en conjuntos cerrados.
Sea A cerrado en $X \Rightarrow A$ es compacto $\Rightarrow f(A)$ es compacto. $\overset{Y T_2}{\Rightarrow} f(A)$ es cerrado en Y.

Ejemplo. El teorema no es cierto si X no es compacto. Existe f continua y biyectiva del intervalo $(-1, 1)$ en $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + y^2 = 1\}$, ambos con la topología usual. Sin embargo, estos espacios no son homeomorfos.

Producto de espacios compactos

Teorema. $X \times Y$ es compacto si y solo si X e Y son compactos.

Demostración. **$\Rightarrow$)** Consideramos las proyecciones $p_1 : X \times Y \longrightarrow X$, $p_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ que son continuas y suprayectivas.
Entonces, si $X \times Y$ es compacto, X e Y son compactos.
$\Leftarrow$) Sea $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ un recubrimiento abierto de $X \times Y$.
Si ponemos cada U_i como unión de abiertos básicos obtenemos $\mathcal{A}' = \{A'_j \mid j \in J\}$ donde, para todo $j \in J$, $A'_j = U_j \times V_j$, con U_j abierto de X, V_j abierto de Y.
Para cada $x \in X$, como $\{x\} \times Y$ es compacto (por ser homeomorfo a Y), existen $A'_{j_{x,1}}, \dots, A'_{j_{x,n_x}} \in \mathcal{A}$ tales que $\{x\} \times Y \subset A'_{j_{x,1}} \cup \cdots \cup A'_{j_{x,n_x}}$.
Sea $U^x = U_{j_{x,1}} \cap \cdots \cap U_{j_{x,n_x}}$ entorno abierto de X tal que $U^x \times Y \subset A'_{j_{x,1}} \cup \cdots \cup A'_{j_{x,n_x}}$.
La familia $\{U^x \mid x \in X\}$ es un recubrimiento abierto de X.
Por la compacidad de X, existen $x_1, x_2, \dots x_k$ tales que $X = U^{x_1} \cup U^{x_2} \cup \cdots \cup U^{x_k}$.
Entonces $X \times Y = (A'_{j_{x_1,1}} \cup \cdots \cup A'_{j_{x_1,n_{x_1}}}) \cup \cdots \cup (A'_{j_{x_k,1}} \cup \cdots \cup A'_{j_{x,n_{x_k}}})$.
Finalmente, si para cada uno de estos abiertos básicos escogemos un abierto de $\mathcal{A}$ que lo contenga, obtenemos un subrecubrimiento finito de $\mathcal{A}$.

Ejemplo. $[0,1] \times [0,1]$ es compacto y por tanto sus espacios cociente también lo son.

Subespacios compactos de $\mathbb{R}^n$

Teorema. Un subespacio A de $\mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado en la distancia euclídea (o en cualquiera de las distancias equivalentes a ésta).

Demostración. $\Rightarrow$) Sea A es compacto. Entonces A es cerrado porque $\mathbb{R}^n$ es T_2.
Sea $\mathcal{A} = \{B(\bar{0}, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ recubrimiento de A por abiertos de $\mathbb{R}^n$. Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset B(\bar{0}, n_0)$. Por tanto, A es acotado.

$\Leftarrow$) Supongamos que A es cerrado y acotado.
Por ser acotado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $A \subset [-n_0, n_0]^n$ que es compacto.
Como A es cerrado y está contenido en un compacto, es compacto.

Ejemplo. La esfera S^n y la bola cerrada B^n de $\mathbb{R}^n$ son compactos.

Corolario. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, X es compacto. Entonces existen puntos c y d de $\mathbb{R}$ tales que $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ para cada $x \in X$).

Idea de la demostración. Como f es continua y X es compacto, $A = f(X)$ es compacto y por tanto es cerrado y acotado. Por acotado existe $\sup A$. Por cerrado $\sup A = \max A$.

Corolario. Sean (X, d) un espacio métrico y sean A, B subconjuntos compactos de X. Entonces $d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} > 0$.

Observación. El corolario no es cierto si A y B son subconjuntos cerrados de X.

Teorema del recubrimiento de Lebesgue

Lema. Sea (X, d) un espacio métrico y $K \subset X$ un conjunto compacto. Entonces la función $d : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(x, K) = \inf \{d(x, y) \,:\, y \in K\}$ es continua y para cada $x \in X$ existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$.

Teorema del recubrimiento de Lebesgue. Sea $\mathcal{A} = \{U_i \mid i \in I\}$ un recubrimiento abierto del espacio métrico compacto (X, d). Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $A \subset X$ es tal que $\mathrm{diam}(A) < \delta$, existe $i \in I$ tal que $A \subset U_i$.
El número δ se denomina **número de Lebesgue** para el recubrimiento $\mathcal{A}$.

Demostración. Si $X \in \mathcal{A}$ el resultado es cierto para todo $\delta > 0$.
Supongamos que $X \notin \mathcal{A}$.
Sea $\{A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}\}$ un subrecubrimiento finito de $\mathcal{A}$ y sea $C_i = X \setminus A_{i_1}$.
Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(x, C_i)$, continua por el Lema.
Dado $x \in X$, existe i_j tal $x \in A_{i_j} \Rightarrow d(x, C_i) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$.
Como f es continua, existe $\delta = \min f > 0$. Veamos que $\delta =$número de Lebesgue.
Sea $B \subset X$ tal que $\mathrm{diam}(B) < \delta$. Entonces $B \subset B(x_0, \delta)$, con $x_0 \in B$.
Sea $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $d(x_0, C_{i_0})$ es el mayor de los valores $d(x_0, C_i)$.
Entonces $d(x_0, C_{i_0}) \geq f(x_0) \geq \delta$ y por tanto $B \subset B(x_0, \delta) \subset A_{i_0}$.

Ejercicios

Ejercicio 7. Sea X un espacio T_2 y sean $K_1, K_2 \subset X$ dos compactos disjuntos. Probar que existen abiertos disjuntos U, V con $K_1 \subset U$ y $K_2 \subset V$.

Solución:

Ejercicio 8. Demostrar que $\mathbb{R}^2$ y S^2 no son homeomorfos, y que tampoco lo son $X_1 = \{x^2 + y^2 < 1\}$ y $X_2 = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Solución:

Ejercicios

Ejercicio 9. Demuestra que si X es compacto, entonces todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación (i.e. X es **compacto por puntos límite**).

Solución:

Ejercicio 10. Se $X = \{a, b\}$ con la topología trivial, sea $Y = \mathbb{N}$ con la topología discreta y sea $Z = X \times Y$ con la topología producto. Demuestra que **(a)** todo subconjunto de Z tiene un punto de acumulación pero **(b)** Z no es compacto.

Solución:

Compactificaciones

Un espacio X es **localmente compacto** si para cada $x \in X$ existe $U \in \mathcal{U}^x$ y existe $C \subset X$, C compacto, tal que $x \in U \subset C$.

Observación. Compacto implica localmente compacto.

Ejemplos. $\mathbb{R}$ (en general, $\mathbb{R}^n$) es localmente compacto, $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto.

Proposición. Sea $(X, \mathcal{T}_X)$ T_2. Sea $Y = X \cup \{\infty\}$ ($\infty =$ un punto adicional). Entonces $\mathcal{T}_Y = \{U \mid U \in \mathcal{T}_X\} \cup \{Y \setminus C \mid C \text{ compacto de } X\}$ es una topología en Y.

$(Y, \mathcal{T}_y)$ es la **compactificación por un punto** de X.

Ejemplos. Algunas compactificaciones por un punto (salvo homeomorfismo):

Espacio	$(0,1)$	$[0,1)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{C}$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$	$S^1 \times (0,1)$
Compactificación	S^1	$[0,1]$	S^1	S^2	S^2		

Propiedades. Sea $(X, \mathcal{T}_x)$ T_2 y sea $(Y, \mathcal{T}_Y)$ su compactificación por un punto. Entonces

1. La topología de X como subespacio de Y coincide con $\mathcal{T}_X$.
2. Y es compacto.
3. Y es T_2 si X es localmente compacto.

Ejemplo. $\mathbb{Q}$ es $\mathcal{T}_2$ pero su compactificación por un punto no es $\mathcal{T}_2$.